

Théorie du soliton en hydrodynamique

Un tsunami peut être décrit par la solution soliton de l'équation de Korteweg de Vries (KdV) pour les ondes hydrodynamiques de surface. C'est une solution à profil constant, c'est-à-dire se propageant avec une vitesse v sans se déformer, qui est localisée spatialement.

1.) Obtention de l'équation de KdV

Les notations sont les suivantes, comme on peut le voir sur la figure 12 :

(x,y,z) : repère orthonormé

h : hauteur moyenne du fluide

η : équation de la surface

A : amplitude caractéristique de l'onde hydrodynamique

L : longueur d'onde caractéristique dans la direction x

On pose $\varepsilon = A/L$ et $\delta = h/L$ (grandeurs sans dimension)

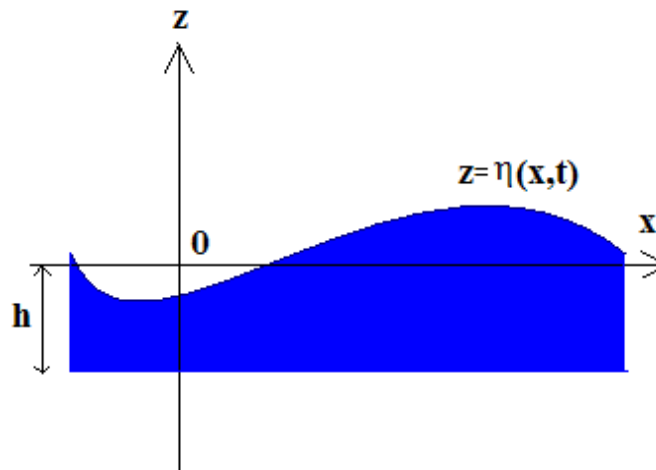


figure 14 : Mise en équation du problème

On considère un **fluide parfait** (incompressible et non visqueux) et **irrotationnel** décrit par :

- l'équation d'Euler,
- l'équation de conservation de la masse,
- la condition cinématique à la surface eau/air,
- la condition à la limite au fond,
- la condition à la limite physique à la surface (on néglige l'effet de la tension superficielle car le rayon de courbure de la surface est très grand),
- les conditions initiales,
- la condition sur la hauteur moyenne h de la couche de liquide : ondes en eau peu profonde,
- et la condition de non divergence de la solution obtenue.

On se place dans le cas d'un **mouvement bidimensionnel** : toutes les variables du système sont indépendantes de la coordonnée y et la vitesse n'a pas de composante selon y .

⇒ Pas de condition aux limites latérales si on choisi une condition initiale qui correspond bien au problème bidimensionnel.

On passe à des **équations sans dimension** pour réduire le nombre de paramètres du problème car cela conduit à des paramètres indépendants les uns des autres, et pour permettre des approximations correctement contrôlées.

On fait les **hypothèses d'échelle** suivantes :

- cas des faibles linéarités en faisant l'hypothèse $\varepsilon \ll 1$ mais non nul (le cas linéaire correspond à ε tendant vers 0),
- cas des ondes en eau peu profonde : la profondeur est supposée faible devant l'extension spatiale caractéristique de l'onde $\delta \ll 1$,
- pour effectuer des développements limités il faut fixer l'échelle relative de ces petits paramètres, on fera les calculs avec $\varepsilon \approx \delta^2$.

L'hypothèse $\varepsilon \approx \delta^2 \ll 1$ est bien vérifiée expérimentalement car les ondes solitaires que l'on observe sont très étendues spatialement par rapport à leur amplitude et les observations sont bien réalisées en eau peu profonde.

On obtient alors **l'équation de Korteweg de Vries** (que l'on peut écrire sous la forme suivante) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^3} = 0$$

Avec $\varphi = \eta / h$, $\xi = x / x_0$ et $\tau = t / t_0$

(où x_0 est une longueur et t_0 un temps)

Dans cette équation, le **terme non-linéaire**, $\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, tend à favoriser la formation de fronts raides ou d'ondes de choc, comme le montre la figure 15.

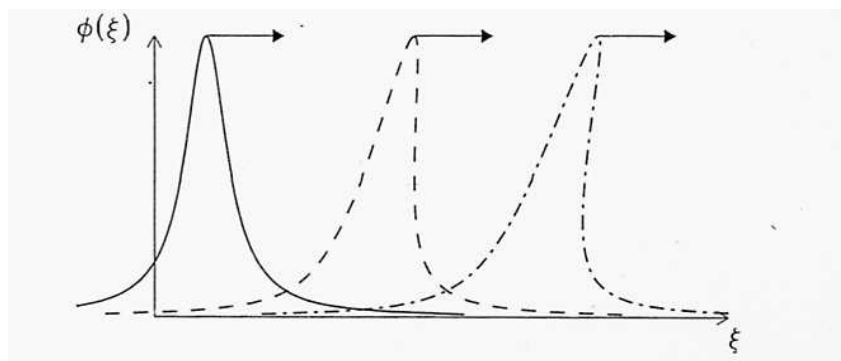


figure 15 : Evolution d'un pulse dont la dynamique est régie par l'équation obtenue en négligeant le troisième terme de KdV [O1]

Par ailleurs, lorsque l'on néglige le terme non-linéaire, on obtient une équation dont la relation de dispersion est $\omega = -q^3$ et dont la vitesse de phase $v_\varphi = \omega / q$ dépend du nombre d'onde q . Ainsi le **milieu** est **dispersif**, ce qui entraîne un étalement de l'impulsion comme nous le constatons sur la figure 16. [O1]

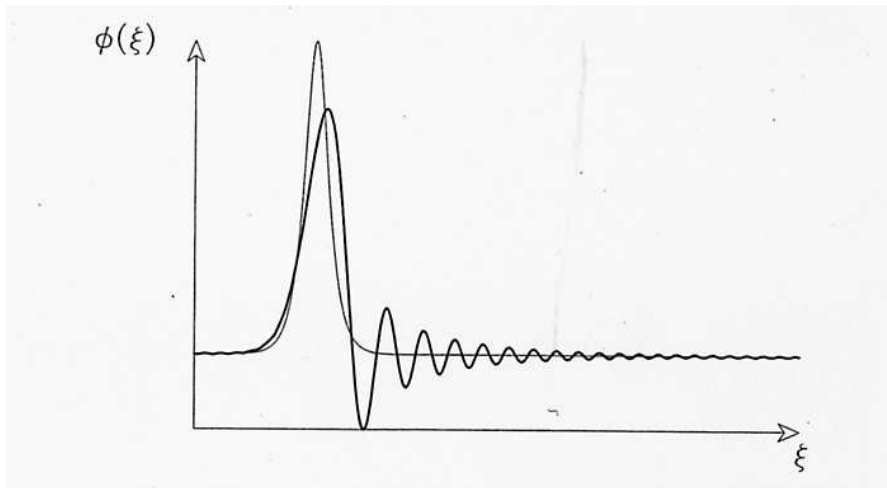


figure 16 : Evolution d'un pulse dans le cas d'une dynamique régie par l'équation de KdV linéarisée [O1]

2.) La solution soliton de KdV

La solution soliton est un cas particulier de l'équation de KdV, c'est le cas d'une solution à profil constant et localisée spatialement.

On obtient alors :

$$\varphi = \frac{A}{\cosh^2[(\xi - 2A\tau)\sqrt{\frac{A}{2}}]} \quad \text{avec } A > 0$$

La condition $A > 0$ correspond au fait que l'on n'observe pas d'ondes solitaires de type dépression à la surface de l'eau.

En revenant aux variables dimensionnées, la solution s'écrit :

$$\eta = \frac{\eta_0}{\cosh^2\left[\frac{1}{2h}\sqrt{3\frac{\eta_0}{h}}(x - c_0\left[1 + \frac{\eta_0}{h}\right]t)\right]}$$

On peut définir la largeur $L = \sqrt{\frac{2}{A}}$ du soliton.

Celle-ci décroît lorsque l'amplitude augmente comme le montre la figure 17. Par ailleurs, on constate que le pulse de gauche se déplace beaucoup plus lentement que celui de droite.

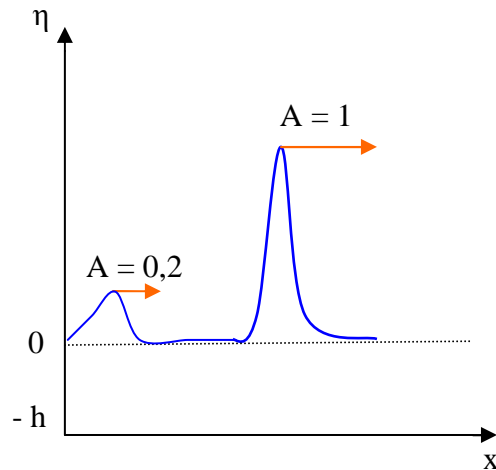


figure 17 : Comparaison entre les solitons que l'on obtient pour différentes valeurs de l'amplitude A

On note que la vitesse de propagation du soliton est supérieure à la vitesse c_0 : on dit que le soliton de KdV est supersonique et l'on peut vérifier que, comme l'avait mesuré J.S.Russell, l'écart à c est proportionnel à η_0 , la hauteur de la vague au dessus de la surface.

Une application numérique peut nous permettre de vérifier que les tsunamis sont décrits de manière très satisfaisante par l'équation de KdV. En effet, bien que se déplaçant dans des océans dont la profondeur moyenne est de 4 km, pour une amplitude de déformation de l'ordre du mètre, la longueur d'onde des tsunamis dépasse les 100 km ce qui justifie l'approximation de propagation d'ondes en eau peu profonde. En ce qui concerne la vitesse de propagation des tsunamis, l'ordre de grandeur typique est $v \sim 200 \text{ m.s}^{-1}$ [O2].

Remarque : Un soliton est extrêmement stable, ce qui explique l'étendue et la diversité des applications de la théorie des solitons. Le soliton est ainsi parfaitement capable de se propager sur un fond irrégulier.

3.) Les solutions multisolitons

L'équation de KdV possède une infinité d'autres solutions que l'on appelle les solutions multisolitons et qui correspondent à une superposition de solitons séparés les uns des autres.

L'équation de KdV étant non linéaire, la collision de deux solitons ne correspond pas à une simple superposition mais il y a une interaction. En effet, lors de la collision, l'amplitude observée est inférieure à la somme des amplitudes des deux solitons. De plus, bien que chaque soliton conserve sa vitesse initiale, les deux solitons subissent un déphasage : l'un est retardé, l'autre avancé.

La photographie de la figure 18, prise au bord de la mer, montre la collision de deux pulses sur un rivage où la profondeur de l'eau est faible. Les paramètres précis de cet évènement ne sont pas connus, mais cette photographie met clairement en évidence que la

forme des deux ondes solitaires est préservée après la collision ; on peut également distinguer le décalage, bien que faible, dû à la collision.

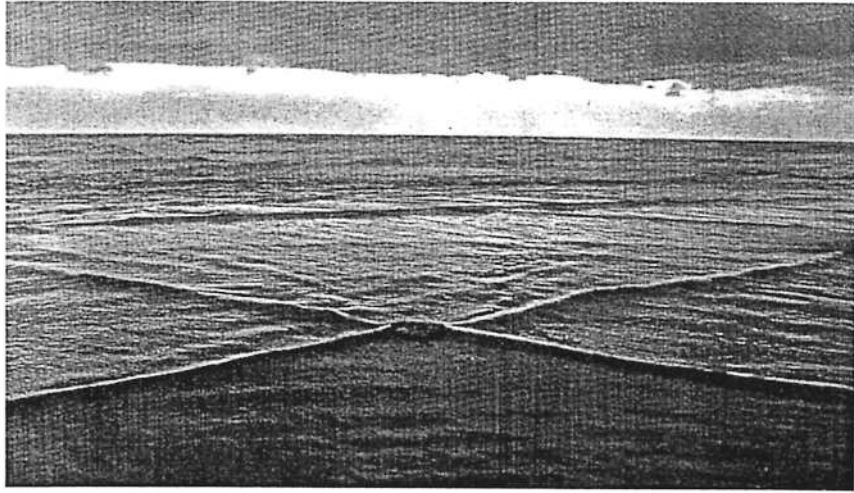


figure 18 : Collision de deux solitons de faible amplitude photographié sur une plage de l'état d'Oregon sur la côte ouest des Etats-Unis [P6]