Etude théorique : Le soliton en mécanique du solide

a) Mise en équation

Données
I : moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe Δ
C : constante de raideur des ressorts en torsion
m : masse des pendules

Avec le théorème scalaire du moment cinétique pour le pendule n (voir figure 5) :

$$I \frac{d^2\theta_n}{dt^2} - C\,(\theta_{n+1+}\,\theta_{n-1} - 2\theta_n) + mlg\,\sin(\theta_n) = 0$$

Equations différentielles non linéaires couplées

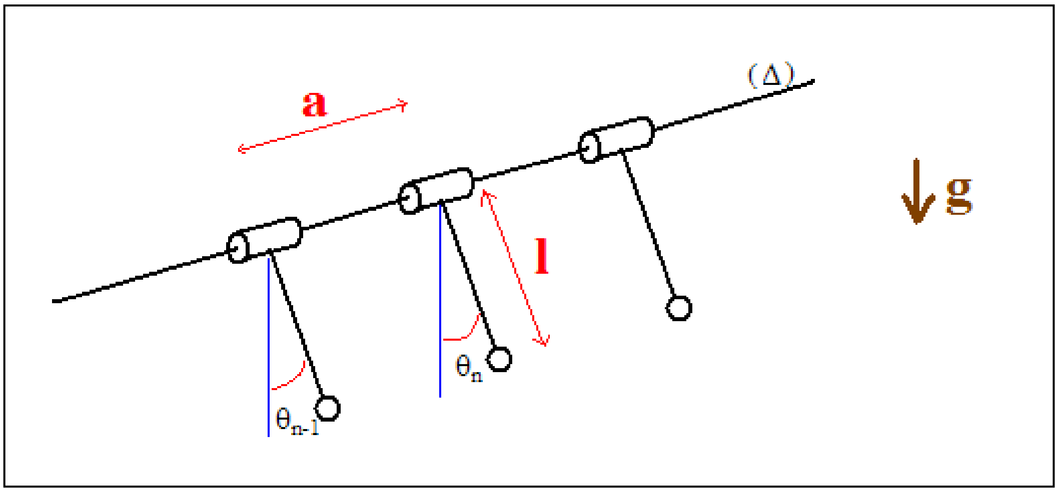


figure 5 : Schéma de la chaîne de pendules – Ici le ressort n'est pas représenté, il est placé sur l'axe Δ, et assure le maintien des pendules à une distance fixe

On fait l'approximation des milieux continus :
$\theta_n \leftrightarrow \theta(x=na,t)$

Celle-ci est valable dans le cas où $\theta(x,t)$ ne varie pas beaucoup d'un pendule à l'autre (c'est à dire si on a un **grand couplage entre les pendules**). Cela sera justifié par la suite.

On fait un développement limité au 2e ordre. Cela suffit pour garder le phénomène de dispersion.

$$\begin{cases} \theta_n = \theta(na,t) \\ \theta_{n+1} = \theta([n+1]a,t) = \theta(na,t) + a.\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}.\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + O\left(\dfrac{\partial^3\theta}{\partial x^3}\right) \\ \theta_{n-1} = \theta([n-1]a,t) = \theta(na,t) - a.\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}.\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + O\left(\dfrac{\partial^3\theta}{\partial x^3}\right) \end{cases}$$

Donc $\theta_{n+1+}\ \theta_{n-1}-2\theta_n \approx a^2.\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$

L'équation s'écrit alors :

$$I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - C.a^2.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + mlg\sin(\theta) = 0$$

On pose :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{mlg}{I} \\ c_0^2 = \dfrac{Ca^2}{I} \end{cases}$$

On obtient alors **l'équation de Sine Gordon (SG)**

$$\boxed{\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \omega_0^2\sin(\theta) = 0}$$

Cette équation est intégrable : ses solutions sont exactes, ce sont les solitons.

b) Résolution de l'équation : cas des solutions solitons

On pose : $z = x-c.t$ (où c est la vitesse de déplacement du profil d'ondes)

L'équation de Sine Gordon s'écrit alors :

$$c^2.\frac{d^2\theta}{dz^2} - c_0^2.\frac{d^2\theta}{dz^2} + \omega_0^2\sin(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{\omega_0^2}{c_0^2-c^2}.\sin(\theta(z))$$

$$\Rightarrow \quad \int_{z_0}^{z}\frac{d\theta}{dz}\frac{d^2\theta}{dz^2}dz = \int_{z_0}^{z}\frac{\omega_0^2}{c_0^2-c^2}\frac{d\theta}{dz}\sin(\theta(z))dz$$

Après multiplication par $\dfrac{d\theta}{dz}$ et intégration par rapport à z

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{c_0^2-c^2}[-\cos(\theta(z))] + C_1$$

La détermination de la constante d'intégration se fait à partir des conditions aux limites.
Un soliton est localise dans l'espace donc :

- $\theta(z) \rightarrow 0\ [2\pi]$ quand $|z| \rightarrow +\infty$

- $\frac{d\theta}{dz}(z) \rightarrow 0\ [2\pi]$ quand $|z| \rightarrow +\infty$

Pour $|z| \rightarrow +\infty$, on a donc : $0 = -\frac{\omega_0^2}{c_0^2-c^2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{\omega_0^2}{c_0^2-c^2}$

D'où
$$\boxed{\mathbf{\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 - \frac{\omega_0^2}{c_0^2-c^2}\,[\,1 - \cos(\theta(z))\,] = 0}}$$

On va considérer que cette expression représente la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle d'une particule fictive (par rapport à z qui est ici un « pseudo-temps »). Ainsi $\theta(z)$ décrit le mouvement à énergie totale nulle de cette particule dans le potentiel :

$$V_{eff}(\theta) = -\frac{\omega_0^2}{c_0^2-c^2}(1 - \cos(\theta))$$

On obtient alors les deux courbes suivantes (figure 6) :

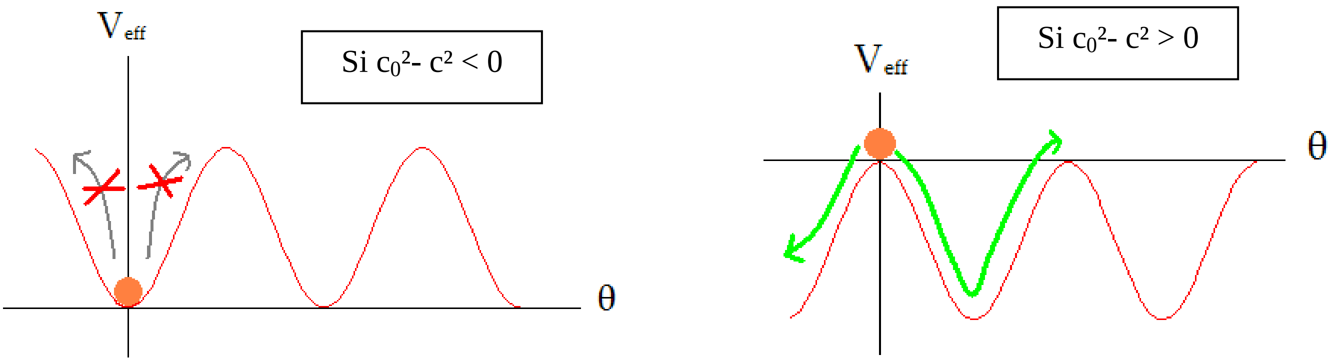


figure 6 : Courbes obtenues à partir de l'équation $V_{eff}(\theta)$

Ces deux graphiques montrent que le mouvement n'est possible que pour $c_0^2 - c^2 > 0$ (on suppose ici que la particule part de l'état de repos en $\theta = 0$). Elle va alors en $\theta = \pm 2\pi$. Elle y sera avec une vitesse $\frac{d\theta}{dz} = 0$ au bout du « temps fictif » z infini.

<u>Conclusion</u> : Les solitons se déplacent à une vitesse c telle que $c < c_0$.

On suppose pour la suite que $c < c_0$ et donc $c^2 < c_0^2$.

[E] $\Leftrightarrow \pm\frac{d\theta}{dz} = \sqrt{\frac{2\omega_0^2}{c_0^2-c^2}} \cdot \sqrt{1-\cos(\theta)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2\omega_0^2}{c_0^2-c^2}}\, dz = \pm\frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos(\theta)}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2\omega_0^2}{c_0^2-c^2}}\,(z-z_0) = \pm \int_{z_0}^{z} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos(\theta)}} = \pm \int_{z_0}^{z} \frac{d\theta}{\sqrt{2}.\,\sin(\frac{\theta}{2})}$$

On résout en posant $t = \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)$, on trouve :

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\theta}{\sqrt{2}.\,\sin(\frac{\theta}{2})} = \sqrt{2}\,.\,\ln(t)$$

D'où $\sqrt{\frac{2\omega_0^2}{c_0^2-c^2}}\,(z-z_0) = \pm\sqrt{2}\,.\,\ln(t)$

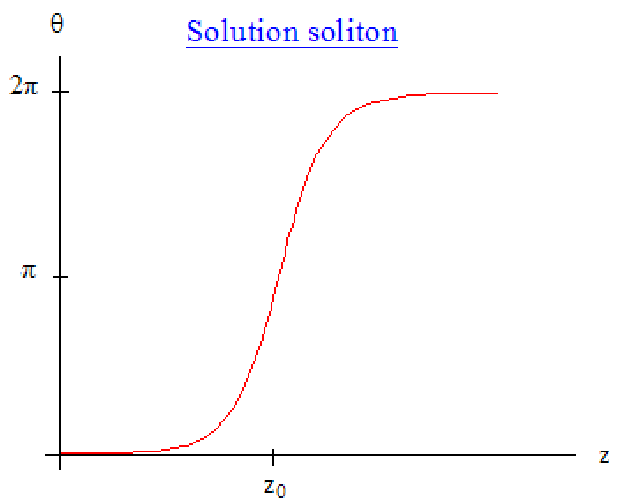
$$\Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\,(z-z_0) = \pm \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta\,(z) = 4.\arctan\left(\exp\left(\pm\frac{\omega_0}{c_0}\frac{z-z_0}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_0}\right)^2}}\right)\right) \qquad \text{(Rappel : } z = x-c.t\text{)}$$

z_0 : constante d'intégration qui correspond à la position du soliton à l'instant initial t=0.

avec
- \+ pour la solution **soliton** (ou « kink »)
- \- pour la solution **antisoliton** (ou « antikink »)

Ainsi sur la figure 7 qui donne les courbes d'évolution de θ en fonction de z pour le soliton et l'antisoliton, on constate que le soliton correspond à un angle qui évolue de 0 à 2π alors que l'antisoliton évolue de 2π à 0 lorsque z augmente (c'est à dire lors de la propagation).



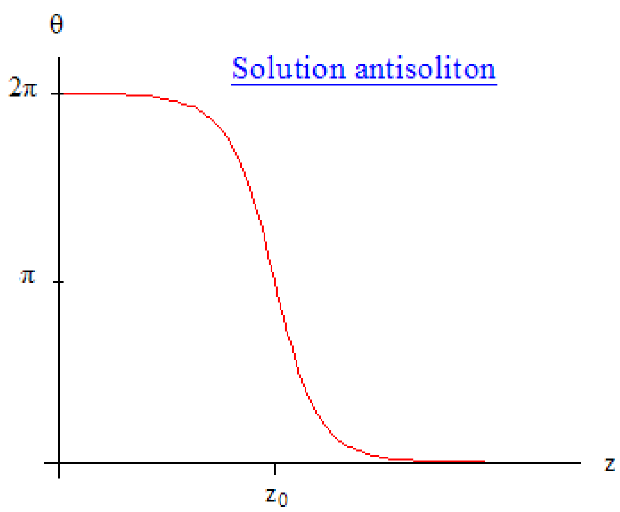


figure 7 : Evolution de l'angle θ au cours du « temps fictif z », ces courbes ont été obtenues pour $z_0 = 5$, $c_0 = 1$, $c=0,1$, $\omega_0 = 1$.

c) Pourquoi un couplage important ? (Validité hors cadre des milieux continus)

Expression de l'extension spatiale (largeur) du soliton : $L = \frac{c_0}{\omega_0}\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_0}\right)^2}$

Au repos, on donc $L_0 = \frac{c_0}{\omega_0}$ ou $L_0 = a.\sqrt{\frac{C}{mlg}}$

On peut ré-exprimer θ (z) avec x et t :

$\theta\,(x,t) = 4.\arctan(\exp(\pm \frac{x-c.t}{L}))$

L'approximation des milieux continus n'est valable que pour $\frac{L_0}{a}$ >>1, soit C>>mlg.

Cela équivaut à dire que l'énergie de torsion des ressorts (liée à la constante de raideur des ressorts en torsion) est très grande devant énergie de rappel de la pesanteur.
Ainsi, il nous faut C >>1 et des angles $\theta_n \approx \theta_{n+1}$: le **couplage doit être très fort**.